

# 第三十屆全國奧林匹克數學競賽試題

◎請將答案及過程寫在答案卷上，否則不予計分。

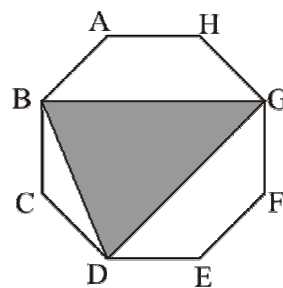
(每題 10 分，共 150 分)

1. 若  $p + \frac{1}{q} = 9$ ， $pq + \frac{1}{pq} = 34$ ，則  $q + \frac{1}{p} = ?$

2. 設  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$ ，則  $f(9) + f(10) + f(11) + \cdots + f(99) = ?$

3. 已知  $k$  為整數，使得  $|4k^2 - 8k - 21|$  為一個小於 500 的質數，試問滿足此條件的  $k$  有哪幾個？

4. 右圖為一個每邊邊長 3 公分的正八邊形 ABCDEFGH，試問三角形 BDG 之面積為多少平方公分？



# 國中二年級 第二節

5. 下面是一個未完成的  $9 \times 9$  數獨：

數獨的規則為：

(1) 每一直行和每一橫列都要有 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字。

(2) 每一個粗框內都要有 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字。

	1	8		4			6	2
3			7	2	5			4
		2		8		7	9	
	7	4	8		2		5	
5		1		6		3	2	7
	3		5		7		8	
9	2	3		7		6		5
8			3	9	4			1
	4			5		9	3	

6. 已知  $p \neq q$ ，若方程式  $x^2 + px + q = 0$  與  $x^2 + qx + p = 0$  有一共同解，則  $(p + q)^{2009}$  的值為多少？

7. 已知  $x$ 、 $y$  二數滿足  $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + 6 \leq xy + 2y$ ，則  $x$ 、 $y$  的值分別為多少？

8. 若  $x_1=158$ ， $x_n=\frac{n}{x_{n-1}}$  (其中  $n$  為正整數且  $n>1$ )，則  $x_3 x_4 x_5 \cdots x_{12}$  的值為多少？
9. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為  $\triangle ABC$  的三邊長，且滿足關係式  $a^4+b^2c^2=a^2c^2+b^4$ ，則  $\triangle ABC$  的形狀為何？
10. 設  $P=\frac{1}{\sqrt{1+2009^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+2009^2}}+\frac{1}{\sqrt{3+2009^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2009+2009^2}}$ ，則  $2009P$  的整數部分為多少？
11. 一個正整數  $x$  等於另一個整數  $y$  的平方，則稱正整數  $x$  為完全平方數，例如： $9=3^2$ ，所以  $9$  為完全平方數；若  $z=2008^2+2008^2\times 2009^2+2009^2$ ，求證  $z$  為一個完全平方數，並寫出  $z$  的平方根。

12. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆不為 0，且滿足  $a+b+c=0$ ， $abc=15$ ，請證明  $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$  為負數。
13. 一個四位數的各位數字皆不為 0，將此四位數的前兩位數字的乘積與後兩位數字的乘積相減，若差為偶數，則稱為 A 類數，若差為奇數，則稱為 B 類數。請問 A 類數和 B 類數各有多少個？(本題將 0、-2、-4、-6、……視為偶數，-1、-3、-5、……視為奇數)
14. 有若干位阿兵哥，剛好組成一個實心的長方形的隊伍(長與寬的人數皆要大於 1)，若在隊伍中再增加 80 人或從隊伍中減去 80 人後，皆能組成一個實心的正方形隊伍，請問原長方形隊伍共有多少位阿兵哥？
15. 按照下面規則擴充新數：
- 已有  $a$ 、 $b$  兩數，可按  $c=ab+a+b$  的規則擴充一個新數，再從  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三數中任取兩數，按規則又可擴充一個新數，……，每擴充一個新數稱為一次操作。現有 1 和 6 兩個數字：
- (1)按上面所述規則操作三次，所得到的擴充新數最大為多少？
- (2)是否能通過上面的規則擴充得到新數 1567？

